***Решение уравнений методом замены переменных****.*

|  |
| --- |
| Выполнили**:**  Воронова Валентина Николаевна  Лютикова Елена Александровна Учителя МОУ «СОШ № 11 с углубленным изучением отдельных предметов» г.Железногорска Курской области |

***«Правильному применению методов можно научиться только применяя их на разнообразных примерах».***

***Г. Цейтен***

Многие уравнения при решении обычными способами приводят к весьма громоздким преобразованиям и отсюда к большему числу ошибок, а часто и к невозможности получения корня данного уравнения. Вместе с тем эти уравнения могут быть сравнительно легко решены, если применить более рациональный, как говорят, нестандартный способ решения.

Одним из таких методов решения уравнений является метод замены переменных.

Введение новой переменной, относительно которой уравнение имеет более простой вид - важнейший метод решения уравнений любых видов и типов.

Умение удачно ввести новую переменную – важнейший элемент математической культуры школьника.

Новая переменная не всегда очевидна. В некоторых случаях, для того чтобы найти удачную замену, требуется дополнительная творческая работа, которая впоследствии окупается простотой и изящностью решения.

Научить применять данный метод, следует специально еще и потому, что не всегда учащиеся могут додуматься до него самостоятельно. В таких случаях удобную подстановку желательно знать заранее.

При решении таких уравнений полезно придерживаться двух советов:

1. новую переменную следует вводить сразу, при первой возможности;
2. после введения новой переменной получившееся уравнение решают полностью с этой переменной, отбросив, если появились посторонние корни и только потом выполняют обратную замену.

Особенно трудно ученикам представить себе, что вместо переменной можно подставить ту или иную тригонометрическую функцию, и получить более «легкое» уравнениепоскольку при этом, как кажется, что тригонометрическое уравнение более сложное, чем алгебраическое. Таким образом, тригонометрическую подстановку можно назвать нестандартным методом решения стандартных уравнений.

1. ***Симметрические и возвратные уравнения***.

Алгебраическое уравнение вида *а ox n + a 1x n-1 + ··· + a n = 0* называется возвратным уравнением, если его коэффициенты, одинаково удаленные от начала и от конца, равны между собой.

Уравнение четвертой степени *ax 4 + bx 3 + cx 2 + dx + e = 0* называется возвратным, если оно имеет вид *ax 4 + bx 3 + cx 2 + kbx + k 2a = 0*, где *k* – не равное нулю число.

При *k = 1* возвратное уравнение принимает вид

*ax 4 + bx 3 + cx 2 + bx + a = 0* и называется симметрическим.

При *k = -1* возвратное уравнение принимает вид

*ax 4 + bx 3 + cx 2 - bx + a = 0* и называется кососимметрическим.

Уравнения такого вида решаются заменой для симметрического и для кососимметрического уравнений.

В симметрическом уравнении нечетной степени *х=-1* всегда является корнем уравнения.

**Пример 1.** Решите уравнение

*Решение*.

,

=0.

Пусть , тогда .

Итак, получим уравнение

Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

⇔Решения первого уравнения совокупности есть =,, а решения второго есть =, =

Ответ: =,=, =

**Пример 2**. Решить уравнение *2x5+5x4-13x3-13x2+5x+2=0*

*Решение.* Это уравнение является симметрическим 5-ой степени. Значит *x=-1*- корень уравнения. Разделив данное уравнение на *x+1*,получим симметрическое уравнение четной степени

Пусть , тогда

Получим уравнение *2t2+3t-20=0; t1=-4; t2=2,5;*

Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

Решение первого уравнения совокупности есть *х1*= 2,

*х2* = 0,5, а решения второго есть *x3*=, *x4*=

Ответ: *х*1= -1; *х1* = 2; *х2* = 0,5; *x3*=; *x4*=

1. ***Уравнения вида***

**Пример 3**. Решить уравнение.

*Решение.(х+2)(х+3)(х+8)(х+12)=4х2.*

Перемножив множители1с 4, а 2 с 3 получим *(х2+14х+24)(х2+11х+24)=4х2.*

Так как *х= 0* не является его корнем, то, разделив уравнение на *х*2, получим равносильное ему уравнение

Пусть , тогда *(t+14)(t+11)=4,*

*t2+25t+150=0*, имеющее два корня = -10, = -15.

Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений:

Решение первого уравнения этой совокупности есть *х1= -6, х2=-4,*

а решения второго есть *х*3 =, *х*4=

Следовательно, исходное уравнение имеет четыре корня.

Ответ: *х1= -6, х2=-4, х3 =, х4 =.*

1. ***Уравнение вида*  *сводится к виду***

**Пример 4.**  Решите уравнение

*Решение.* Так как *x= 0* не является корнем данного уравнения, то, разделив на числитель и знаменатель каждой дроби на *х* получим уравнение

Пусть , тогда

Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

⇔

Первое уравнение совокупности не имеет решений, а решения второго уравнения есть

=,.

Ответ: =,.

1. ***Уравнения, решаемые с помощью формул сокращенного умножения.***

**Пример 5**. Решите уравнение.

(х+1)4+(х-2)4=81.

*Решение.* Пусть *t*= , отсюда х=, тогда получим уравнение

*(t*)4+(*t*)4=81.

После возведения в степень и приведения подобных слагаемых получим уравнение

,

,

.

Ответ:.

**Пример 6**. Решите уравнение.

Пусть , тогда имеем

,

,

=1,

Так как t, то рассмотрим два случая

1)*t*=0,5

2) Решений нет.

Итак,

х-2=0,25,

х=2,25.

Ответ: х=2,25.

**Пример 6**. Решите уравнение.

.

*Решение.* .

Пусть =u, =v .

Тогда имеем:

*u2 +3u+2=0,u1=-2, u2=-1v1=1, v2=2.*

Сделаем обратную замену:

Ответ: -6; -1.

**Пример 7.** Решите уравнение.

Пусть тогда .

,

,

.

, 2)

,

Ответ:

**Пример 8**. Решить уравнение

*Решение*: Обычный прием приведет  к весьма сложным преобразованиям. Вместе с тем заметим, что левая часть уравнения отличается от квадрата выражения в скобках, на постоянное слагаемое. Вполне естественно ввести новую переменную

, *x≠0;* .

Значит, Получим уравнение .

Выполним обратную замену и найдем *x*:

1. *.*

Ответ: .

1. ***Решение уравнений с помощью тригонометрической подстановки.***

Тригонометрическая подстановка является одним из способов реализации метода замены переменной и используется в тех случаях, когда область определения исходного уравнения совпадает с областью значения тригонометрической функции или включается в эту область. Выбор той или иной функции при этом зависит от вида уравнения.

Если из условия задачи следует, что допустимые значения переменной *x* определяются неравенством , то удобны замены  или . В первом случае достаточно рассмотреть , так как на этом промежутке непрерывная функция  возрастает, поэтому каждое свое значение принимает ровно в одной точке. Непрерывная функция  убывает на промежутке , поэтому каждое свое значение принимает ровно в одной точке. Поэтому в случае замены , достаточно взять . Какую из двух данных подстановок выбрать, зависит от конкретной ситуации.

Если же переменная может принимать любые действительные значения, то используются замены  или , так как область значения функции

  и на соответствующих промежутках есть множество всех действительных чисел.

**Пример 9.**Решите уравнение

*Решение.* Так как  , то , то можно положить , t  .

Уравнение примет вид   
⇔2⇔

2

⇔,

1. Решений нет.

Тогда исходное уравнение имеет два корня

.

Ответ:

**Пример 10**. Решить уравнение

*Решение.* Так как переменная *x* может принимать любые действительные значения, можно положить.

Уравнение примет вид,

,

Так как  t, то и получим уравнение

,

Тогда Откуда получим .

.

Так как t, то.

 .

Ответ: .

**Пример 11**. Решить уравнение. .

*Решение.* Пусть  х=t+1, тогда уравнение перепишется в виде

Введем замену , получим

Докажем, что все корни данного уравнения по модулю не превосходят единицы. Пусть  , тогда  . Получили, что при

  левая часть уравнения по модулю больше единицы, а правая – меньше единицы, что невозможно.

Так как , тоположим cosα, α∈. Уравнение примет вид

,

,

Условию α∈ удовлетворяет одно значение .

Итак,

Перейдем к переменной *t*, а затем к переменной *x*

,t=,

.

Ответ: .

**Пример 12**. Решить уравнение.

*Решение.* Из уравнения следует, что . Каждому значению *х* из этого отрезка соответствует единственное значение

, такое, что .

.

, но т.к. , то и .

Тогда имеем:,

Так как ,то совокупность уравнений имеет три корня Тогда

Ответ: , , .

**Пример 13**. Найти количествокорней уравнения

на отрезке

*Решение.* Так как , то пусть . Тогда имеем

8

8,

8,

8,

8

Умножим обе части уравнения на , получим

4

2

,

Так как , то Тогда исходное уравнение имеет 4 корня.

Ответ: 4 корня.

***Задачи для самостоятельного решения.***

1. *3х4 – 4х3 + 2х2 – 4х + 3=0,*
2. *х4 +4х3 - 2х2 +4х + 1=0,*
3. *6х4-35х3+62х2-35х+6=0.*
4. *3х 4 + 2х 3 – 22х 2 + 6х + 27 = 0.*
5. *х 4 - х 3 – 10х 2 +2х + 4 = 0;*
6. *2х4+3х3 -4х2 –3х +2=0,*
7. *х4 – 7х3 + 14х2 – 7х + 1=0,*
8. *(х-4)(х+5)(х+10)(х-2)=18х2,*
9. *(2х2-3х+1)(2х2+5х+1)=9х2,*
10. *.*
11. *4(х+5)(х+6)(х+10)(х+12) - 3х2=0,*
12. *(х-3)(х+4)(х+6)(х-2)=10х2,*
13. *(х-4)(х+5)(х+10)(х-2)=18х2.*
14. *(х+3)4+(х+5)4=2,*
15. *(х-2)4+(х-3)4=1,*
16. *х4+(х-1)4=97.*
17. *(х-3)4+(х-1)4=2,*
18. *,*
19. *,*
20. *.*
21. *,*
22. *.*
23. *,*
24. *,*
25. *.*
27. *,*
28. *.* Найти количество решений на отрезке

**Литература.**

1. Горнштейн П. И. Экзамен по математике и его подводные рифы / П. И. Горнштейн, А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – М.: Илекса, 2004.
2. Горнштейн П. И. Тригонометрия помогает алгебре / П. И. Горнштейн. – М.: Бюро Квантум, 1995. Приложение к журналу «Квант», №3/95.
3. Мерзляк А.Г, Полонский В.Б.,Якир М.С. Алгебраический тренажер. Пособие для школьников и абитуриентов / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – М.: Илекса, 2005.
4. Кулиев В.Д., Макаров Е.В. Пособие по математике для абитуриентов./ М.: Издательство МГОУ, 2004.
5. Шарыгин И.Ф. Сборник задач по математике с решениями 11 класс. /М.: Издательство «Астрель», 2001.
6. А.Г. Цыпкин, А.И. Пинский. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы. /М.: Наука . Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989г.
7. Галицкий М.Л. Гольдман А.М. Звавич Л.И. Сборник задач по алгебре./ М.: Издательство «Просвещение», 1997.