**Изучение метода интервалов в углубленном курсе математики при реализации ФОП ООО и СОО**

*Фрундин Я.В.,*

*учитель математики МБОУ*

*«Средняя общеобразовательная школа № 62» г. Курска,*

*Верютина Е.В.,*

*учитель математике МБОУ*

*«Средняя общеобразовательная школа № 18» г. Курска*

Утвержденные приказами Министерства просвещения Российской Федерации от 18.05.2023 № 370 и № 371 федеральные образовательные программы основного общего образования [1] и среднего общего образования [2] соответственно, а в их рамках – федеральные рабочие программы по математике для углубленного уровня (7-9 классы [3], 10-11 классы [4]) требуют внимательного анализа с точки зрения структуры изучаемого материала, его содержания в разрезе развертывания практически всех содержательно-методических линий школьного курса математики по сравнению к действующей до введения ФОП методической системой обучения математике в школе. В данной статье рассмотрим вопрос, связанный с изучением метода интервалов для решения неравенств.

Беглый анализ данных документов приводит к следующим результатам, которые приведем в таблице.

Таблица

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Класс | Основное содержание | Предметные результаты |
| 9 класс | Квадратные неравенства с одной переменной. Решение неравенств графическим методом и методом интервалов. | Решать квадратные неравенства, использовать метод интервалов. |
| 10 класс | Основные методы решения целых и дробно-рациональных неравенств. | Применять метод интервалов при решении неравенств |
| 11 класс | Нет упоминаний | Нет упоминаний |

Какие выводы можно сделать?

1. Впервые знакомство с методом интервалов осуществляется при решении квадратных неравенств. Данный метод должен быть рассмотрен наравне с графическим методом решения квадратных неравенств. Традиционно под графическим методом понимается использование графической модели с изображением эскиза параболы для определения знаков квадратичной функции на полученных промежутках (см., например, [5]). Решение иных неравенств не предполагается. В предметные результаты соответственно попадает только умение ученика использовать метод интервалов при решении квадратных неравенств.

По сравнению со всеми действующими в 2023 году учебниками это заметный шаг назад. Особенно, если учесть, что речь идет об углубленном уровне изучении математики. Во многих учебниках данный материал изучается уже в 8 классе (например, см. [5]), в некоторых – в 9 классе (см. [6, 8]). Более того, в 9 классе метод интервалов традиционно рассматривался при решении целых и дробно-рациональных неравенств (см., например, [6, 7, 8].

2. Применение метода интервалов для решения рациональных неравенств целиком и полностью переносится в 10 класс.

3. В 11 классе совсем нет упоминаний о применения метода интервалов при решении различных неравенств, прежде всего, так называемых комбинированных неравенств. Хотя вопросы о решении показательных, логарифмических, иррациональных неравенствах с помощью равносильных переходов рассматриваются.

В целом, складывается впечатление, что значение метода интервалов для решения неравенств разработчиками ФРП сознательно преуменьшается и данный метод «выдавливается» из школьного курса.

Но практика практически всех экзаменационных испытаний, в том числе ЕГЭ по математике, показывает важность уверенного владения учащимися методом интервалов, который во многих случаях является наиболее рациональных способом решения предлагаемых неравенств.

Заметим также, что и при действующих учебниках умение применять учащимися метод интервалов, как показывает анализ работ ЕГЭ [9], оставляет желать лучшего. Что же мы получим тогда на выходе в случае реализации в будущих учебниках того видения, которое заложено в ФРП?

Можно уповать лишь на то, что допускается такая организация обучения, в том числе и математике, при которой содержание и планируемые результаты будут не ниже указанных в ФОП. Не ниже – значит можно выше!

Далее мы рассмотрим несколько типовых примеров, которые необходимо, на наш взгляд, будет рассматривать с учащимися с целью формирования полноценных умений по применению метода интервалов для решения различных неравенств.

Первый пример является классическим заданием на применение метода интервалов для решения дробно-рациональных неравенств. При этом демонстрируются все «тонкие» моменты.

Пример 1. Решите неравенство

$$\frac{x^{2}(2x-1)}{(x+2)(1-3x)}\geq 0.$$

Решение.

1. Рассмотрим функцию $y=\frac{x^{2}(2x-1)}{(x+2)(1-3x)}$.

2. Найдем $D\left(y\right):  \left(x+2\right)\left(1-3x\right)\ne 0⇔x\ne -2∧x\ne \frac{1}{3}.$

Таким образом, $D\left(y\right)=R\\left\{-2; \left.\frac{1}{3}\right\}.\right.$

Комментарий. Здесь и далее считаем правильным активно использовать соответствующую символику.

3. Найдем нули функции:

$$\frac{x^{2}(2x-1)}{(x+2)(1-3x)}=0 ⇔\left\{\begin{array}{c}x^{2}\left(2x-1\right)=0,\\\left(x+2\right)\left(1-3x\right)\ne 0\end{array}\right.⇔$$

$$ ⇔x=0∨x=\frac{1}{2}.$$

Итак, $0$ и $\frac{1}{2}$ – нули функции.

4.

$$-2$$

$$0$$

$$\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2}$$

$$x$$

$$-$$

$$+$$

$$-$$

$$-$$

$$+$$

5. $y\geq 0 при x\in \left(-\infty ;-2\right)∪\left\{0\right\}∪\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right].$

Ответ: $\left(-\infty ;-2\right)∪\left\{0\right\}∪\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right].$

В примере 2 метод интервалов демонстрируется для заданий, в которых переменная находится в том числе и под корнем. Практика показывает, что если с учащимися рассматривать задачи, аналогичные примеру 1, то подобные задания вызывают серьезные затруднения, связанные, прежде всего, с нахождением и учетом области определения функции.

Пример 2. Решите неравенство

$$(2x-7)(x^{2}-16)\sqrt{3x+6}\leq 0.$$

Решение.

1. Рассмотрим функцию $y=(2x-7)(x^{2}-16)\sqrt{3x+6}$.

2. Найдем $D\left(y\right):  3x+6\geq 0 ⇔x\geq -2.$

Таким образом, $D\left(y\right)=\left[-2;+\infty \right).$

3. Найдем нули функции:

$$\left(2x-7\right)\left(x^{2}-16\right)\sqrt{3x+6}=0,$$

$$x=3,5∨x=\pm 4∨x=-2.$$

$$3,5\in D\left(y\right),4\in D\left(y\right),-4\notin D\left(y\right),-2\in D\left(y\right).$$

Итак, числа $3,5$; $4;-2$ есть нули функции.

4.

$$-2$$

$$3,5$$

$$4$$

$$x$$

$$+$$

$$-$$

$$+$$

5. $y\leq 0 при x\in [3,5;4] ∪\left\{-2\right\}.$

Ответ: $[3,5;4] ∪\left\{-2\right\}.$

Пример 3 демонстрирует применение метода интервалов для решения таких неравенств, для которых чаще используются аналитический метод с применением равносильных переходов.

Пример 3. Решите неравенство

$$\sqrt{3x+7}>x-1.$$

Решение.

Перенесем все слагаемые в левую часть:

$$\sqrt{3x+7}-x+1>0.$$

1. Рассмотрим функцию $y=\sqrt{3x+7}-x+1$.

2. Найдем $D\left(y\right): 3x+7\geq 0 ⇔x\geq -\frac{7}{3}.$

Таким образом, $D\left(y\right)=\left[-\frac{7}{3};+\infty \right).$

3. Найдем нули функции:

$$\sqrt{3x+7}-x+1=0 ⇔ \sqrt{3x+7}=x-1 ⇔$$

$$⇔\left\{\begin{array}{c}3x+7=\left(x-1\right)^{2}\\x-1\geq 0,\end{array}\right. ⇔ \left\{\begin{array}{c} x^{2}-5x-6=0,\\x\geq 1,\end{array}\right.⇔$$

$$⇔\left\{\begin{array}{c}x=-1 или x=6,\\x\geq 1,\end{array}\right. ⇔ x=6.$$

Итак, $6$ – нуль функции.

4.

$$-\frac{7}{3}$$

6

$$x$$

$$-$$

$$+$$

5. $y>0 при x\in \left[-\frac{7}{3};6\right).$

Ответ: $\left[-\frac{7}{3};6\right).$

Пример 4 является типовым заданием комбинированного характера, для решения которого метод интервалов является более эффективным, чем применение аналитического метода с помощью равносильных переходов.

Пример 4. Решите неравенство



Решение.

1. Рассмотрим функцию: 

2. Найдем область определения функции:

$$D\left(y\right): \left\{\begin{matrix}x-1>0,\\6-x>0,\\\begin{matrix}x>0,\\\begin{matrix}x\ne 1,\\6-x\ne 1\end{matrix}\end{matrix}\end{matrix}\right. ⇔ \left\{\begin{matrix}x>1,\\x<6,\\x\ne 5.\end{matrix}\right.$$

Таким образом, 

3. Найдем нули функции.

,







Так как, $–3\notin D(y)$, $2\in D(y)$, то  – единственный нуль функции.

4. Изобразим полученные точки на координатной прямой и определим знаки на промежутках с учетом области определения функции.

,

,

.

*x*

1

6

+

–

2

–

5

5. Таким образом,  при 

Ответ: 

Комментарий. Еще проще будет решение, если воспользоваться методом «рационализации», а уже к получившемуся рациональному неравенству применить метод интервалов.

Убеждены, что тщательный разбор подобного рода заданий позволит сформировать необходимые предметные результаты, будет способствовать развитию математической культуры учащихся.

Литература

1. Федеральная образовательная программа основного общего образования. Утверждена приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 18.05.2023 № 370 "Об утверждении федеральной образовательной программы основного общего образования" (Зарегистрирован 12.07.2023 № 74223). – URL: <https://static.edsoo.ru/projects/fop/index.html#/sections/2> (дата обращения: 20.10.2023).
2. Федеральная образовательная программа среднего общего образования. Утверждена приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 18.05.2023 № 371 "Об утверждении федеральной образовательной программы среднего общего образования" (Зарегистрирован 12.07.2023 № 74228). – URL: <https://static.edsoo.ru/projects/fop/index.html#/sections/3> (дата обращения: 20.10.2023).
3. Федеральная рабочая программа основного общего образования. Математика (углубленный уровень) (для 7-9 классов образовательных организаций). – Москва, 2023. – URL: [https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/14\_ФРП\_Математика-7-9-классы\_угл.pdf](https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/14_%D0%A4%D0%A0%D0%9F_%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0-7-9-%D0%BA%D0%BB%D0%B0%D1%81%D1%81%D1%8B_%D1%83%D0%B3%D0%BB.pdf) (дата обращения: 20.10.2023).
4. Федеральная рабочая программа среднего общего образования. Математика (углубленный уровень) (для 10-11 классов образовательных организаций). – Москва, 2023. – URL: [https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/20\_ФРП\_Математика-10-11-классы\_угл.pdf](https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/20_%D0%A4%D0%A0%D0%9F_%D0%9C%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0-10-11-%D0%BA%D0%BB%D0%B0%D1%81%D1%81%D1%8B_%D1%83%D0%B3%D0%BB.pdf) (дата обращения: 20.10.2023).
5. Алгебра. 8 класс. Учебник для общеобразовательных организаций (углубленный уровень). В 2 ч. Ч. 1 / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. — 15-е изд., стер. — М.: Ммемозина, 2019. — 288 с.
6. Алгебра. 9 класс : учеб, пособие для общеобразоват. организаций: углубл. уровень / |Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков и др.). — М. : Просвещение, 2018. — 400 с.
7. Алгебра. 9 класс : учебник для общеобразовательных учреждений и школ с углубленным изучением математики / [Н. Я. Виленкин и др.] ; под ред. Н. Я. Виленкина. – 9-е изд. – Москва : Просвещение, 2012. – 366 с.
8. Алгебра. Углублённый уровень. 9 класс : учебник / А. Г. Мерзляк, В. М. Поляков ; под редакцией В. Е. Подольского. – 3-е изд., дораб. – Москва : Вентана-Граф, 2019. – 298 с.
9. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2022 года по МАТЕМАТИКЕ. – Москва, 2022. – URL: <https://doc.fipi.ru/ege/analiticheskie-i-metodicheskie-materialy/2022/ma_mr_2022.pdf> (дата обращения: 20.10.2023)